

پاسخنامه تشریحی

۱

الف

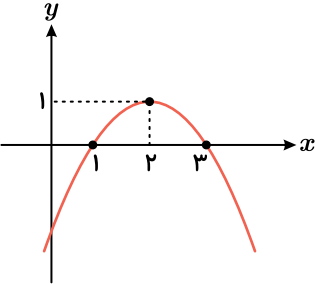
نادرست - زیرا داریم:

$(x + 1)^2 - x^2 = (x^2 + 2x + 1) - x^2 = 2x + 1$

معادله $2x + 1 = 4$ ، یک معادله درجه اول است.

۲

$x = -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow y = -(2)^2 + 4(2) - 3 = 1 \Rightarrow S(2, 1)$

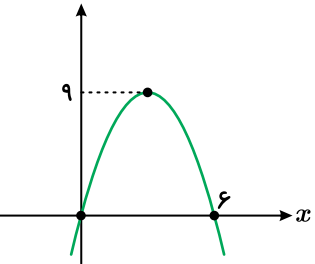


x	۱	۲	۳
y	۰	۱	۰

۳

مختصات رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-2} = 3 \rightarrow y = 6(3) - (3)^2 = 9 \rightarrow S(3, 9)$

و با انتخاب $(0, 0)$ ، $(0, 6)$ نمودار سهمی به شکل مقابل به دست می‌آید.



۴

$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 4$
 $x^2 + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4(1)(1) = -3 < 0 \Rightarrow$ معادله ریشه ندارد.

x	$\circ$		$\pmb{\text{f}}$		
$x^{\pmb{\text{v}}}-\pmb{\text{f}}x$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$x^{\pmb{\text{v}}}+x+1$	$+$		$+$		$+$
$P=\frac{x^{\pmb{\text{v}}}-\pmb{\text{f}}x}{x^{\pmb{\text{v}}}+x+1}$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

$P \leq 0 \Rightarrow x \in [\circ, \pmb{\text{f}}]$

۵

الف

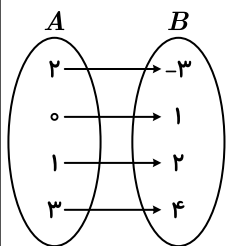
در نمایش تابع به صورت زوج مرتب‌ها، اگر دو زوج مرتب با مؤلفهٔ اول برابر وجود داشته باشد، باید مؤلفهٔ دوم آنها نیز برابر باشند.

ب

$$\begin{cases} (2, -3), (2, a + b) \in f \Rightarrow a + b = -3 \Rightarrow a = -1, b = -2 \\ (0, 1), (0, a - b) \in f \Rightarrow a - b = 1 \end{cases}$$

$f = \{(2, -3), (0, 1), (1, 2), (3, 4)\} \Rightarrow D_f = \{2, 0, 1, 3\}, R_f = \{-3, 1, 2, 4\}$

پ



۶

الف

نادرست - زیرا خط $x = -۱$ شامل بی‌شمار نقطه با طول مساوی و عرض متفاوت است و نمی‌تواند تابع باشد.

۷

مطابق مشخصات داده‌شده، واضح است که تابع f ، یک تابع ثابت بوده و لذا $f(۹) = ۴$. همچنین تابع g ، یک تابع همانی است، از این‌رو $g(۸) = ۸$ ؛ پس می‌توان نوشت:
 $۲f(۹) - g(۸) = ۲(۴) - ۸ = ۰$

۸

روش اول:

$$a = \frac{-۲ - ۰}{۴ - ۲} = -۱ \quad y = ax + b \Rightarrow y = -x + b \xrightarrow{(۴, -۲)} b = ۲$$

$$D = (۱, ۴] \quad , R = [-۲, ۱)$$

روش دوم:

$$m = \frac{-۲ - ۰}{۴ - ۲} = -۱ \Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - (-۲) = -۱(x - ۴) \Rightarrow y = -x + ۲$$

$$D = (۱, ۴] \quad , R = [-۲, ۱)$$

روش سوم:

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} ۲a + b = ۰ \\ ۴a + b = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۲ \end{cases}$$

$$D = (۱, ۴] \quad , R = [-۲, ۱)$$

۹

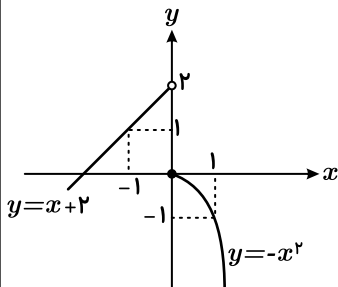
x	۰	۱
y	۰	-۱

$$f(x) = -x^۲, \quad x \geq ۰ \Rightarrow S(۰, ۰)$$

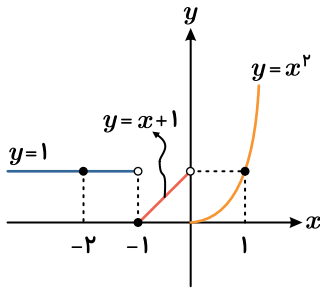
x	-۱	۰
y	۱	۲

$$f(x) = x + ۲, \quad x < ۰$$

دامنهٔ تابع $\mathbb{R}$ و برد تابع بازهٔ $(-\infty, ۲)$ می‌باشد.



۱۰



$$y = x^2, x \geq 0$$

$$y = x + 1, -1 \leq x < 0$$

$$y = 1, x < -1$$

x	۰	۱
y	۰	۱

x	-۱	۰
y	۰	۱

x	-۲	-۱
y	۱	۱

۱۱ $x = -2$ در معادله صدق می‌کند:

$$4 - 2(m + 1) + 3m = 0 \Rightarrow 4 - 2m - 2 + 3m = 0 \Rightarrow m = -2$$

$$\text{معادله: } x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \end{cases}$$

۱۲

$$(20 + 2x)(10 + 2x) = 600 \rightarrow 4x^2 + 60x - 400 = 0 \xrightarrow{\div 4} x^2 + 15x - 100 = 0$$

$$\rightarrow (x - 5)(x + 20) = 0 \rightarrow x = 5 \quad x = -20 \quad \text{غیر قابل قبول}$$

۱۳ روش اول: استفاده از روش کلی در حل معادله درجه ۲

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$\begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac \\ x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4900 \\ x_1 = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}, x_2 = -15 \end{cases}$$

روش دوم: استفاده از تجزیه در حل معادله درجه ۲

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$(2x + 30)(2x - 5) = 0 \Rightarrow x = -15, x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}$$

روش سوم:

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow 4x^2 + 50x - 150 = 0$$

$$(x + 15)(4x - 10) = 0 \Rightarrow x = -15, x = \frac{5}{2} \text{ قابل قبول}$$

۱۴ معادله سهمی به صورت $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. داریم:

$$f(0) = 6 \Rightarrow a(0)^2 + b(0) + c = 6 \Rightarrow c = 6$$

$$f(-2) = 0 \Rightarrow a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \xrightarrow{c=6} 4a - 2b = -6 \Rightarrow 2a - b = -3$$

$$f(-1) = 2 \Rightarrow a(-1)^2 + b(-1) + c = 2 \Rightarrow a - b + 6 = 2 \Rightarrow a - b = -4$$

$$\begin{cases} 2a - b = -3 \\ a - b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a - b = -3 \\ -a + b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \xrightarrow{a-b=-4} 1 - b = -4 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow f(x) = x^2 + 5x + 6$$

۱۵

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (0, 2) \Rightarrow 2 = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow c = 2$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (-1, 0) \Rightarrow 0 = a(-1)^2 + b(-1) + c \xrightarrow{c=2} a - b = -2 \quad (1)$$

$$\text{روی سهمی قرار دارد. } (2, 0) \Rightarrow 0 = a(2)^2 + b(2) + c \xrightarrow{c=2} 4a + 2b = -2 \xrightarrow{\div 2} 2a + b = -1 \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow \begin{cases} a - b = -2 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow 3a = -3 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{a-b=-2} -1 - b = -2 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow y = -x^2 + x + 2$$

۱۶ در عبارت $ax^2 + bx + c$ اگر $a < 0$ و $\Delta < 0$ ، آنگاه عبارت همواره منفی است:

$$a = m < 0 \quad (1), \quad \Delta = (m + 1)^2 - 4m^2 = m^2 + 2m + 1 - 4m^2 = -3m^2 + 2m + 1 < 0 \quad (1)$$

$$-3m^2 + 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -\frac{1}{3}$$

m	$-\frac{1}{3}$	1
Δ	$-$	$+$

$$\Delta < 0 \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty) \quad (2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow m \in (-\infty, -\frac{1}{3})$$

۱۷ فرض کنیم x عدد طبیعی موردنظر باشد، داریم:

$$x^2 = 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \text{ (ق ق)} \\ x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ (غ ق ق)} \end{cases}$$

۱۸

روش اول:

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{4\} \text{ مجموعه جواب:}$$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$-(X - 4)^2$	$-$	$-$	ϕ	$-$
$2X + 1$	$-$	ϕ	$+$	$+$
$\frac{-(X - 4)^2}{2X + 1}$	$+$	$-$	ϕ	$-$

روش دوم:

$$\frac{-(x - 4)^2}{2x + 1} \geq 0 \xrightarrow{(x-4)^2 \geq 0} 2x + 1 < 0 \rightarrow x < -\frac{1}{2}$$

ریشه صورت کسر: $x - 4 = 0 \rightarrow x = 4$

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{4\} \text{ مجموعه جواب:}$$

روش سوم:

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{4\} \text{ مجموعه جواب:}$$

X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
$\frac{-(X - 4)^2}{2X + 1}$	$+$	$-$	ϕ	$-$

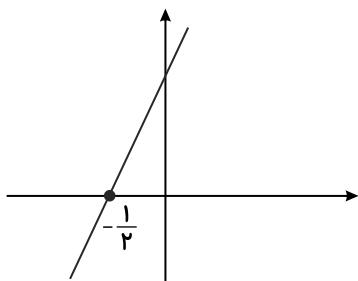
$$-(x - 4)^2 \leq 0$$

روش چهارم:

$$-(x - 4)^2 \text{ به ازای هر } x \neq 4 \text{ منفی است. و با توجه به نمودار } y = 2x + 1$$

$$\text{عبارت } 2x + 1 \text{ به ازای } x < -\frac{1}{2} \text{ منفی است. پس:}$$

$$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup \{4\} \text{ مجموعه جواب:}$$



۱۹ مجموعه جواب نامعادله $|x - \frac{a+b}{2}| > \frac{a-b}{2} (a > b)$ به صورت $(-\infty, b) \cup (a, +\infty)$ است.

بنابراین مجموعه جواب نامعادله $|x - \frac{-1+3}{2}| > \frac{3-(-1)}{2}$ به صورت $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ است.

نامعادله: $|x - 1| > 2$

